PAMEM – Jan – 2010

Função afim

1) A escala Luc de temperaturas foi elaborada por Luciano com base nas temperaturas máxima e mínima que registrou em sua casa no ano passado. A correspondência da escala Luc com a escala Celsius é a seguinte:

^{o}L	^{o}C
0	14
100	39

a) Por que devemos usar a função afim para relacionar os valores das duas escalas de uma mesma temperatura?
b) Em que temperatura ferve a água na escala L?

2) Admita que três operários trabalhando 8 horas por dia construam um muro de 36 metros em 5 dias.
a) Quantos dias são necessários para que uma equipe de 5 operários, trabalhando 6 horas por dia construa um muro de 15 metros?
b) Que hipóteses foram implicitamente utilizadas na solução do problema?

3) Resolva a inequação $\frac{1}{2x+1} < \frac{1}{1-x}$.

4) Uma caixa d'água com 1000 litros foi cheia ao meio dia de certo dia. Por uma torneira mal fechada a água escoa a uma vazão constante e, por isso, às 6 horas da tarde desse dia, só tinha 850 litros.
a) Em que momento a caixa ficará pela metade?
b) Defina uma função que permita a, cada momento, calcular a quantidade de água na caixa.

Função afim – **Soluções**

1)

a) Sejam x e y os valores das escalas Celcius e Luciano para uma mesma temperatura. A função afim é a função que relaciona as duas escalas pois uma variação de temperatura de 1°C produzirá uma variação de h°L qualquer que seja a temperatura.

b) Temos então $y = ax + b$. Substituindo os dados,

$$\begin{cases} 0 = 14a + b \\ 100 = 39a + b \end{cases}.$$

Resolvendo, encontramos $a = 4$ e $b = -56$. Assim $y = 4x - 56$ e a água ferve a 344°L.

2) Sejam: N o número de operários, H o número de horas trabalhadas por dia, C o comprimento do muro e D o número de dias de trabalho.

a) Assumimos que todos os trabalhadores tenham mesma capacidade de trabalho e que, dentro dos dados apresentados, o número de dias de trabalho é diretamente proporcional ao comprimento do muro e inversamente proporcional ao número de operários e ao número de horas diárias de trabalho.

b) Temos então $D = k\dfrac{C}{NH}$ ou $\dfrac{DNH}{C} = k$. Assim, $\dfrac{D \cdot 5 \cdot 6}{15} = \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 8}{36}$.

O número de dias de trabalho é $D = \dfrac{5}{3} = 1 + \dfrac{2}{3}$, ou seja, 1 dia mais 4 horas de trabalho.

3) $\dfrac{1}{2x+1} < \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow \dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{1}{1-x} < 0 \Rightarrow \dfrac{1 - x - 2x - 1}{(2x+1)(-x+1)} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-3x}{(2x+1)(-x+1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{x}{(2x+1)(-x+1)} > 0$.

Fazendo o quadro de variação dos sinais temos que a solução da inequação é o conjunto: $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup [0, 1)$.

4) É mais prático considerar $t = 0$ para o meio dia do dia em questão e contar o tempo em horas a partir desse momento. Para modelar o problema a função afim é a função adequada pois a quantidade de água perdida por unidade de tempo é constante (dizemos que a vazão é constante).

a) Seja y a quantidade de água em litros presente na caixa no tempo t. A função afim é $y = at + b$ e, substituindo os dados, temos $b = 1000$ e como $850 = 6a + 1000$ encontramos $a = -25$. Assim, $y = -25t + 1000$ e, quando a caixa estiver pela metade, $500 = -25t + 1000$ o que dá $t = 20$. Contando 20 horas a partir do dia inicial chagamos às 8 horas da manhã do dia seguinte.

b) Observe, entretanto que, quando $t = 40$ encontramos $y = 0$ e a caixa fica vazia. A quantidade de água presente na caixa a partir do instante $t = 0$ é:

$y = -25t + 1000$ se $0 \le t \le 40$ e $y = 0$ se $t > 40$.